太阳影子定位

一、问题的提出

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面．太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体太阳影子的变化规律，来确定视频拍摄的地点和日期.

由于物体在不同地点、不同日期和不同时间的影子长度和角度的变化规律会发生变化，其中包含着许多地理位置和时间的信息，这些信息为我们确定出物体所处的位置和时间提供了依据.

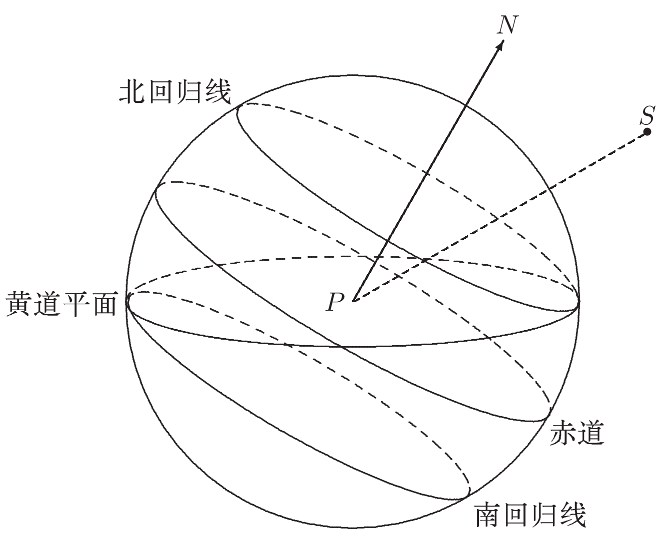
这一赛题由国防科学技术大学的刘易成博士和吴孟达教授提供.

二、太阳影子长度的数学模型

设一年有 T^* 天，一天有 t^* 小时．以春分 (3 月 21 日) 为第 0 天 ($D=0$), 则第 D 天 t 时刻，地球的中心坐标为

$$P\left(r\cos\frac{2\pi T}{T^*}, r\sin\frac{2\pi T}{T^*}, 0\right),$$

其中 $r=|PS|$ 为地球中心离太阳中心的距离， $T=D+\dfrac{t}{t^*}$.



设第 D 天 t 时刻，太阳直射地球的纬度为 δ, 称为赤纬角.

已知在春分 t_0 时刻太阳直射地球赤道，此时地球中心的坐标为

$$P_0\left(r\cos\frac{2\pi T_0}{T^*}, r\sin\frac{2\pi T_0}{T^*}, 0\right),$$

其中

$$T_0 = \frac{t_0}{t^*}.$$

记北回归线的纬度为 δ_0, 则北极方向是 $(0,0,1)$ 绕 SP_0 轴旋转 δ_0 后的方向.

在地球绕太阳公转的过程中，北极方向始终保持不变，因而

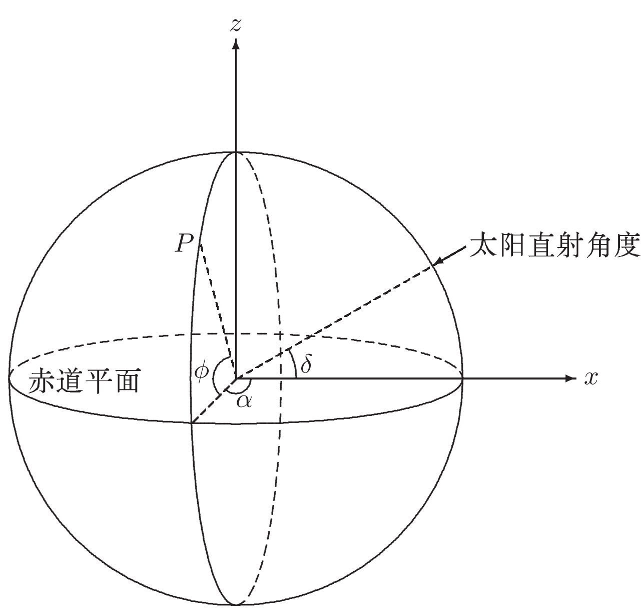
$$\overrightarrow{PN} = \left(\sin\frac{2\pi T_0}{T^*}\sin\delta_0, -\cos\frac{2\pi T_0}{T^*}\sin\delta_0, \cos\delta_0\right).$$

$\overrightarrow{PS}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\delta$, 因此

$$\sin\delta = \sin\frac{2\pi\left(D+\frac{t-t_0}{t^*}\right)}{T^*}\sin\delta_0.$$

假设赤纬角在一天内保持不变，则

$$\sin\delta = \sin\frac{2\pi D}{T^*}\sin\delta_0.$$



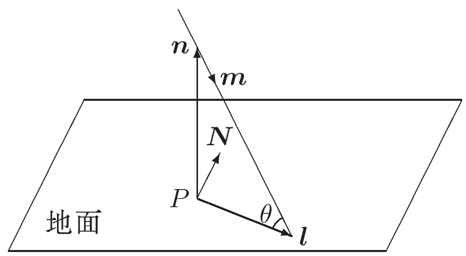
P 点在正午时刻到达 xz 平面，对任意给定的时间 t, 对应的时角为

$$\alpha = \frac{\pi}{12}(t-12).$$

记 P 点的纬度为 ϕ, 则 t 时刻的坐标为

$$P(R\cos\phi\cos\alpha, R\cos\phi\sin\alpha, R\sin\phi),$$

其中 R 为地球的半径.



P 点所在切平面的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = (\cos\phi\cos\alpha, \cos\phi\sin\alpha, \sin\phi).$$

而第 D 天 t 时刻太阳的入射方向为

$$\boldsymbol{m} = (-\cos\delta, 0, -\sin\delta),$$

太阳相对于地面的仰角 (称为太阳高度角) θ 满足

$$\sin\theta = \cos\phi\cos\delta\cos\alpha + \sin\phi\sin\delta.$$

若物体为 L, 则投影长度为

$$l = \frac{L}{\tan\theta}.$$

太阳光在地面上的投影向量为

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{m} - (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$$

其长度为

$$|\boldsymbol{l}| = \cos\theta.$$

P 点的正北方向为 P 指向北极的方向在 P 点处切平面上的单位投影向量，也就是 z 轴正向在切平面上的单位投影向量，即

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{z} - (\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{z} - (\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}|}.$$

因此

$$\boldsymbol{N} = (-\cos\alpha\sin\phi, -\sin\alpha\sin\phi, \cos\phi).$$

于是，正北方向 $\boldsymbol{N}$ 旋转至太阳影子方向的角度 (称为影子方位角) ω 满足

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{l} = \cos\theta\cos\omega = \cos\delta\cos\alpha\sin\phi - \sin\delta\cos\phi,$$

即

$$\cos\omega = \frac{\cos\delta\cos\alpha\sin\phi - \sin\delta\cos\phi}{\cos\theta}.$$

另一方面，地球的正东方向为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{n} = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0),$$

因而

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{l} = \cos\theta\sin\omega = \sin\alpha\cos\delta,$$

即

$$\sin\omega = \frac{\sin\alpha\cos\delta}{\cos\theta}.$$

太阳光从外太空穿过大气层进入地球时，会发生折射现象.

记太阳的折射率为 n, 折射角为 $\frac{\pi}{2} - \theta'$, 则由折射定律

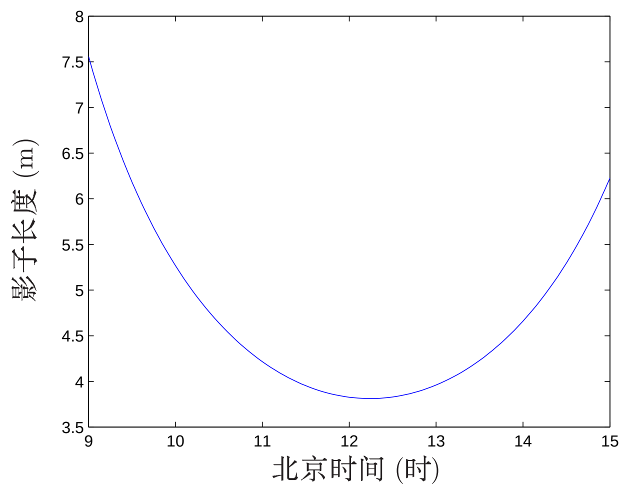
$$n = \frac{\cos\theta}{\cos\theta'},$$

即

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta}{n}.$$

因此，在考虑太阳折射的情况下，物体的影子长度为

$$, \qquad L$$

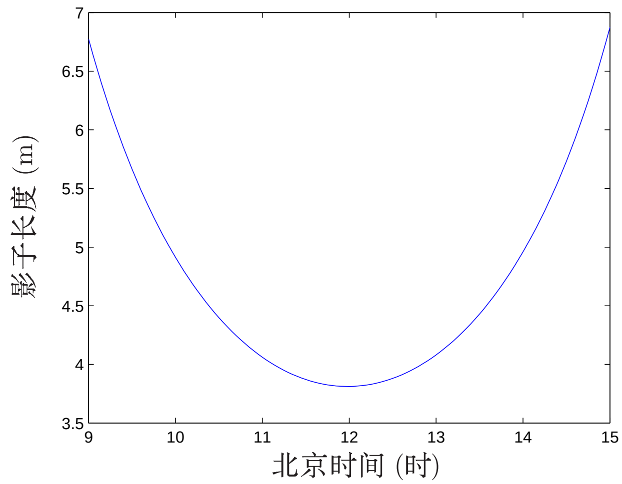


前面的公式是在地球绕太阳的旋转轨道是标准的圆形，一年中每天都是均匀旋转的假设推导出来的，这种情况下采用的时间也就是我们日常所用的计时，称为平太阳时.

如果考虑地球绕太阳的旋转轨道是椭圆，地球相对于太阳的自转不是均匀的，此时得到的时间称为真太阳时.

$$\text{真太阳时} = \text{平太阳时} + \text{真平太阳时差}.$$

10 月 22 日的真平太阳时差为 15 分 31 秒.



三、确定地点的反演模型

在已知日期、北京时间的情况下，建立确定当地时间和位置的数学模型.

记 t_i $(i = 0, \cdots, n)$ 为测量时间点，其中 $n+1$ 为测量点数， Δt 为测量的时间间隔，则

$$t_i = t_0 + i\Delta t.$$

t_i 时刻直杆的影子长度为

$$l_i = \frac{L}{\tan\theta_i},$$

太阳高度角为

$$\sin\theta_i = \cos\phi\cos\delta\cos\alpha_i + \sin\phi\sin\delta,$$

时角为

$$\alpha_i = \frac{\pi}{12}(t_i - 12).$$

确定 t_0 和 ϕ, 使得

$$\min \quad \sum_{i=0}^{n}(l_i - l_i^*)^2.$$

但是，影子长度理论值的公式中直杆的长度 L 也是未知的，这样需要优化反演的参数就是 3 个，而不是 2 个.

目标函数可改写为

$$\min \quad \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{l_{i+1}}{l_i} - \frac{l_{i+1}^*}{l_i^*}\right)^2.$$

约束条件

纬度应在 $\pm 90°$ 之间

$$|\phi| \le 90.$$

直杆影子只有在太阳位于地平线上才会出现

$$\theta > 0.$$

已知日期确定时间和地点的数学模型就归结为如下的优化问题：求 t_0, ϕ, 使得

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{l_{i+1}}{l_i} - \frac{l_{i+1}^*}{l_i^*} \right)^2, \\ \text{s.t.} \quad & |\phi| \le 90, \\ & \theta_i > 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

经度 ψ 的确定：

$$\psi = 120 - 15(t_0^* - t_0),$$

其中 t_0^* 为影子初始时刻所对应的北京时间.

根据影子长度的变化，还可判断出直杆影子的当地时间是上午还是下午.

影子长度单调递增是下午，此时可增加一个约束条件

$$t_0 \ge 12.$$

影子长度单调递减是上午，此时可增加约束条件

$$t_0 \le 12 - n\Delta t.$$

影子长度先递减后递增， 12:00 一定在区间 $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ 内，此时可增加约束条件

$$12 - (i+1)\Delta t \le t_0 \le 12 - (i-1)\Delta t.$$

这是一个非线性优化问题, 可以用 Matlab 或 LINGO 中带约束条件的优化命令求解. 也可以用牛顿法、拟牛顿法求解，还可以用遗传算法、粒子群算法等智能算法求解.

还可以采用搜索法进行求解. 搜索法本质上是枚举, 将优化变量按一定精度离散化, 得到一系列离散值，对所有这些离散值进行枚举，寻找出其中的最优解及相应的优化变量值. 搜索法较为简单，编程容易，但工作量巨大. 为了减少搜索时间，可采用变步长搜索法. 先用较大的精度对优化变量离散化，搜索得到其中的最优解及相应的优化变量值. 然后缩小精度, 在最优变量值附近按更小精度离散化后再进行搜索. 重复这一过程, 直到达到事先设定的精度为止. 变步长搜索法在保证搜索精度的情况下，大大减少了搜索时间，提高了搜索效率.

四、同时确定日期和地点的反演模型

在仅知道北京时间，不知道日期的情况下，建立确定日期、当地时间和位置的数学模型. 此时，上面的非线性优化模型仍可使用. 不同的是，在日期已知的情况下，赤纬角

可以确定；而在日期未知的情况下，就会增加一个未知参数 (日期), 并且这个参数是整型变量，与当地时间及经纬度是实型变量不同.

如果采用搜索法求解，只需对日期简单搜索就可以了，上面介绍的搜索法和变步长搜索法可以直接使用. 对日期进行枚举，对每一天，按上一节给出的搜索法或变步长搜索法求解，得到每一天的最优解及相应的优化变量值. 然后在得到的 365 个最优值中选取最优解.

如果采用牛顿法、拟牛顿法等其他方法，不应将日期作为实型变量直接进行优化求解. 可将优化算法与搜索法相结合，对日期进行枚举，对每一天采用优化算法求解，得到每一天的最优解及相应的优化变量值，然后再进行选优.

单纯采用太阳影子的长度信息进行反演，反演效果还不是最理想. 在目标函数中可以利用更多的已知信息.

t_i 时刻影子方位角 ω_i 满足

$$\cos\omega_i = \frac{\cos\delta\cos\alpha_i\sin\phi - \sin\delta\cos\phi}{\cos\theta_i}, \quad \sin\omega_i = \frac{\sin\alpha_i\cos\delta}{\cos\theta_i}.$$

注意到附件中虽然给出了影子端点的坐标，但是并未说明坐标轴是如何选取的，如果直接采用方位角作为判别依据，就会多增加一个参数 (坐标旋转角度). 为了减少优化参数，可以用方位角的差作为判别依据：

$$\sum_{i=0}^{n-1}[(\omega_{i+1} - \omega_i) - (\omega_{i+1}^* - \omega_i^*)]^2.$$

这样，可得到如下优化问题：

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=0}^{n-1}\lambda\left(\frac{l_{i+1}}{l_i} - \frac{l_{i+1}^*}{l_i^*}\right)^2 \\
& \qquad + (1-\lambda)[(\omega_{i+1} - \omega_i) - (\omega_{i+1}^* - \omega_i^*)]^2, \\
\text{s.t.} \quad & |\phi| \le 90, \\
& \theta_i > 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n,
\end{aligned}$$

其中 λ $(0 < \lambda < 1)$ 为加权系数.

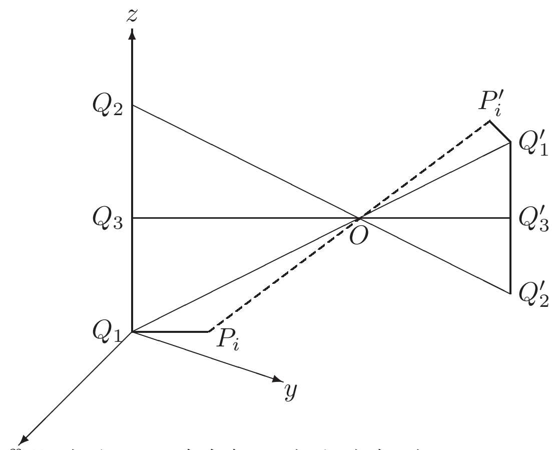
还可以进一步采用如下目标函数，以利用更多信息：

$$\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda\left(\frac{l_j}{l_i} - \frac{l_j^*}{l_i^*}\right)^2 + (1-\lambda)[(\omega_j - \omega_i) - (\omega_j^* - \omega_i^*)]^2,$$

即考虑任意两个时间点之间影长和旋转角度的变化，而不仅仅是相邻两个时间点之间的变化.

五、视频数据的反演模型

对于视频数据，因为是经过射影变换的，不能简单地认为视频中影子的长度与实际影子的长度成比例.



假设摄像机的镜头(即光心) 正对直杆，光心坐标为 $O(p,q,\ r)$, 则视线方向为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OQ_3}=(-p,-q,0)$, 其中 $Q_3(0,0,r)$ 为从光心沿视线方向对应于直杆上的点.

从光心沿视线反方向对应于像平面直杆上的点为 $Q_3'(a,b,r)$.

$$\frac{a}{b}=\frac{p}{q},$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{p^2+q^2}}=\frac{k+1}{k},$$

$$k=\frac{|Q_1Q_2|}{|Q_1'Q_2'|}=\frac{L}{l}$$

为物像比

$$a=\frac{k+1}{k}p,\quad b=\frac{k+1}{k}q.$$

记影子端点的坐标为 $P_i(x_i,y_i,0)$, 影子像端点的坐标为 $P_i'(x_i',y_i',z_i')$, 则像平面的方程为

$$p\left(x'-\frac{k+1}{k}p\right)+q\left(y'-\frac{k+1}{k}q\right)=0.$$

由 P_i, O, P_i' 三点共线可得

$$\frac{x_i-p}{x_i'-p}=\frac{y_i-q}{y_i'-q}=\frac{z_i-r}{z_i'-r}.$$

P_i' 落在像平面中，因而

$$p\left(x_i'-p-\frac{1}{k}p\right)+q\left(y_i'-q-\frac{1}{k}q\right)=0.$$

解得

$$
\begin{aligned}
x_i' &= p + \frac{(p^2+q^2)(x_i-p)}{k[p(x_i-p)+q(y_i-q)]},\\
y_i' &= q + \frac{(p^2+q^2)(y_i-q)}{k[p(x_i-p)+q(y_i-q)]},\\
z_i' &= r + \frac{(p^2+q^2)(z_i-r)}{k[p(x_i-p)+q(y_i-q)]}.
\end{aligned}
$$

若某点落在地面上， $z_i=0$, 则有

$$
z_i' = r - \frac{(p^2+q^2)r}{k[p(x_i-p)+q(y_i-q)]}.
$$

$$
w' = \frac{(k+1)r}{k}, \quad w'' = \frac{(k+1)r-L}{k}.
$$

直杆的影子长度为

$$
l_i' = |P_i'Q_1'| = \frac{\sqrt{(p^2+q^2)(py_i-qx_i)^2+r^2(px_i+qy_i)^2}}{k|p(x_i-p)+q(y_i-q)|}.
$$

直杆影子的旋转角度满足

$$
\cos\theta_{ij}' = \frac{\overrightarrow{Q_1'P_i'}\cdot\overrightarrow{Q_1'P_j'}}{l_i'l_j'}.
$$

确定视频拍摄时间和地点的数学模型可归结为：求日期 D, 初始当地时间 t_0, 纬度 ϕ, 光心坐标 (p,q,r), 使得

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=i+1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda\left(\frac{l_j'}{l_i'}-\frac{l_j'^*}{l_i'^*}\right)^2 \\
& \qquad + (1-\lambda)(\theta_{ij}'-\theta_{ij}'^*)^2,\\
\text{s.t.} \quad & |\phi| \le 90,\\
& \theta_i > 0, \quad i=0,1,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

六、竞赛论文的评述

赤纬角的近似公式

$$
\begin{aligned}
\delta = \frac{180}{\pi}\Bigg[&0.006918 - 0.399912\cos\left(\frac{2N\pi}{365}\right)\\
&+ 0.070257\sin\left(\frac{2N\pi}{365}\right) - 0.006758\cos\left(\frac{4N\pi}{365}\right)\\
&+ 0.000907\sin\left(\frac{4N\pi}{365}\right) - 0.002697\cos\left(\frac{6N\pi}{365}\right)\\
&+0.00148\sin\left(\frac{6N\pi}{365}\right)\Bigg].
\end{aligned}
$$

审题不够仔细

赛题第 1 问中明确要求给出影子长度关于各参数的变化规律，但相当一部分参赛队没有进行分析，也没有给出变化规律. 事实上，这些变化规律对后面几个问题的解决是有帮助的.

第 2 至第 4 问要求给出若干个可能的时间和地点，但绝大多数参赛队都只给出了一个时间和地点. 由于影子的变化关于春分、秋分、冬至、夏至具有近似对称性，在同样精度下会有多个可能的时间和地点.

还有一部分参赛队没有考虑到北京时间与北京当地时间的不同，在给出天安门广场处直杆影子长度时，将北京时间直接作为北京当地时间进行作图，从而得到了错误的结果.

在确定时间和地点时, 有一部分参赛队将影子长度近似地视为当地时间的二次函数, 利用二次拟合将影子长度最短的时间作为中午 12:00, 这种方法也是可以的, 但误差略大. 但是有少部分学生，仅利用 2 个或 3 个坐标点的信息，通过解方程组的方法确定时间和地点参数，这种方法忽略了大部分信息，仅利用了少量信息，是一种不好的方法.

在建立优化模型进行参数反演时，应明确写清楚反演模型，包括目标函数和约束条件. 大多数参赛队只考虑了目标函数，而没有明确写出约束条件. 有些参赛队虽然写出了约束条件，但不完整，特别是没有考虑影子只可能在白天出现，晚上是不可能有的，从而缺少了约束条件.

在设计反演算法时，大多数队都只简单地使用了数学软件中的标准函数，但没有写清楚在使用这些函数时，应注意什么，函数中的参数如何确定，约束条件如何处理. 特别地，没有体现反演的全局最优解的思想.

有一部分队采用坐标点进行反演，即选择如下的目标函数：

$$\sum_{i=0}^{n}[(x_i - x_i^*)^2 + (y_i - y_i^*)^2].$$

表面上来看，与仅用影长的目标函数相比，利用了更多信息，但由于坐标轴的选取方式未知，需要增加一个坐标轴旋转角度作为反演参数，从而增加了反演的难度. 因此，这种方法虽然是可用的，但不是最好的方法.

同样地，直接用影长作为目标函数，因为增加了杆长作为反演参数，也不是最佳方法.

对第 3 问，由于日期的属性与时间、经纬度的属性不同，反演模型是具有混合变量的优化问题. 因此，在论文中应明确说明混合变量优化问题是如何处理的，而不应笼统地说用软件计算得到结果. 判别模型和计算方法的优劣需要对模型进行检验，绝大多数队都没有考虑到这一点. 应该在给定日期和地点的情况下，利用第 1 问的模型自行构造数据，然后利用自己建立的反演模型和求解方法对自己构造的数据进行反演，来确定日期与地点，并与给定的日期和地点相比较，以此来检验反演模型和求方法的好坏. 在对第 3 问进行检验时，也可以就地取材，利用附件 1 提供的数据，采用问题 3 的模型和算法进行反演，再与问题 2 的结果相比较.

对真实的视频数据，几乎没有一个队能够完整给出解决问题的数学模型．即使考虑到针孔成像，也仅仅是罗列了一大堆针孔成像的公式，这些公式离开解决问题还很远．